

EPISTEMOLOGÍA Y CONSTRUCCIÓN DE UNA NUEVA DISCIPLINA CIENTÍFICA: LA *DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES*

Angel Ruiz

(aruiz@cariari.ucr.ac.cr)

CIMM Matemática, UCR; AIEM Matemática, UNA.

Jesennia Chavarría

(jesenniach@yahoo.com)

AIEM Matemática, UNA.

Palabras clave

Educación Matemática, Epistemología de la Educación Matemática, Didáctica de las Matemáticas, Matemáticas.

Resumen

Se hace una reseña de algunas de las ideas de la escuela francesa que ha acuñado un nuevo enfoque en la *Didáctica de las Matemáticas*. Se establece un balance teórico de algunas de estas ideas. El énfasis es epistemológico.

Abstract

A brief review about the French *Didactique des Mathématiques* is accomplished, and a theoretical assessment on these ideas is developed. We give an emphasis to the epistemological dimensions.

Introducción

Construir la Educación Matemática como una disciplina científica es una de las más importantes tareas que se realizan en estos momentos en la comunidad matemática y educativa. Es un proceso reciente (menos de 50 años) nutrido de circunstancias diversas que ha incluido: la reforma de las Matemáticas Modernas (bajo el comando de los matemáticos de las universidades en las décadas 1950 y 1960), poderosos cambios en la filosofía de las matemáticas (que enfatizan una dirección *falibilista*, no absolutista, heurística, *socioempírica*), desarrollo sostenido de comunidades profesionales de educadores de las matemáticas (profesores, investigadores, administradores), y todo dentro de un escenario histórico bañado por una nueva etapa que ha hecho del conocimiento su *piedra de toque*, y en particular del uso intenso de diversas tecnologías), con variables vigorosas como la globalización e internacionalización de casi todos los aspectos de la vida cotidiana. Con especial intensidad se han desarrollado trabajos por grupos de investigadores en diferentes partes del mundo para aportar nuevas ideas y modelos epistemológicos sobre las matemáticas y la Educación Matemática.

Entre los esfuerzos para sostener y desarrollar esta nueva disciplina debe señalarse con relieve aquellos de la *Didactique des Mathématiques*, que en Francia han buscado amalgamar conceptos, métodos, procesos de investigación que han sido apoyo para muchos investigadores y profesionales de la Educación Matemática.

Reseñar brevemente algunas de las ideas de este grupo de investigadores nos permitirá obtener una visión de las reflexiones y debates que en los últimos años se han dado en la activa comunidad de educadores de las matemáticas.

Etapas y acepciones

Tal vez una forma inicial para buscar comprender mejor los aportes en la epistemología y la educación matemática por parte de este grupo de intelectuales que han dado un nuevo sentido a los términos *Didactique des Mathématiques*, es reseñando su propia valoración del decurso de la Educación Matemática y cuál es su interpretación de su significado.

Los autores de esta “escuela” tienen una visión particular de la evolución de la Educación Matemática: afirman tres etapas, una “antigua”, una “clásica” y, finalmente, la que constituiría la misma escuela francesa.

La “antigua” que correspondería a la etapa (o visión) en ausencia de profesionalización, en la cual la enseñanza de las matemáticas podía verse como un arte asociado a las calidades del profesor o del alumno, y donde lo fundamental es el dominio de la disciplina de las matemáticas y las habilidades mostradas por el profesor en la enseñanza.

La etapa "clásica" sería aquella en la cual se sistematizan algunos de los asuntos relacionados con la problemática del profesor como, por ejemplo, los conocimientos previos de los alumnos, la motivación para la aprendizaje, técnicas para la resolución de problemas, la evaluación y, lo más importante, se trata de una didáctica que utiliza otras disciplinas en la explicación de su quehacer. En esta etapa se usan los trabajos de Piaget, Vygotsky y Bruner entre otros. Es una visión que, se afirma, se puede apreciar en investigadores como, entre muchos, Bauersfeld, Alan Schoenfeld, Jeremy Kilpatrick (Kilpatrick, 1981) y Richard Lesh, Martha Landau (Lesh y Landau, 1983).

Gascón (1998), por ejemplo, afirma la existencia de dos enfoques en esta etapa “clásica”: por un lado, uno centrado en el aprendizaje del alumno, con conceptos por ejemplo como el de "aprendizaje significativo" (Ausubel, 1968) en donde el objetivo de la investigación es esencialmente referido a cuál es el conocimiento matemático del alumno y su evolución. Existe aquí, se afirma, una reducción de la didáctica a la psicología en la explicación de los fenómenos didácticos de la matemática. Un segundo enfoque se establece por una actividad centrada en la actividad del profesor aunque orientada, por supuesto, hacia la formación del estudiante. Aquí, al tocarse las condiciones y pensamiento de los profesores, se afirma la necesidad de incorporar conocimientos de otras disciplinas como la psicología educativa, la sociología, la historia de las matemáticas, la pedagogía y la epistemología de las matemáticas etc. En esta visión “clásica” los hechos didácticos no modifican las nociones importadas de otras disciplinas. En esencia, afirman los defensores de la didáctica de la matemática francesa, que el enfoque “clásico” se ve condicionado por los fenómenos psicológicos; más aún, que se da una subordinación de lo didáctico a lo psicológico. De esta manera, en el fondo, se afirma que esta visión de la Educación Matemática renuncia a construir la didáctica de las matemáticas como una disciplina científica. Entonces: subordinación a la psicología o a otras disciplinas es la observación crítica más fuerte.

La tercera etapa va a ser la “*didáctica fundamental*”. La explicación, según los mismos autores, para la creación de la nueva etapa en la enseñanza de las matemáticas es que desde el punto de vista anterior no era posible resolver asuntos específicos en los quehaceres de la didáctica matemática. Por ejemplo, el papel de las rutinas en el aprendizaje de las matemáticas, las actividades creativas, el papel de la resolución de problemas, la relación entre los aprendizajes de aritmética, álgebra y geometría, la adquisición de conceptos precisos matemáticos o los criterios para el diseño de un currículo de matemáticas en general. Se afirma que estos asuntos no podían ser abordados desde la óptica clásica.

Brousseau plantea el asunto en términos de *acepciones* de la didáctica. Y establece cuatro: la primera, se entiende como el arte de enseñar en general (Comenius); la segunda, como un conjunto de técnicas para enseñar; la tercera, como “la descripción y el estudio de la actividad de enseñanza en el marco de una disciplina científica de referencia.” (Brousseau, 1990). En esta última se tiene una actitud más “reflexiva”, hay investigación de una práctica. Sostiene que estas acepciones se pueden ver como complementarias. Pero apuntala su nueva visión y la distancia frente a las otras acepciones:

“... desde hace una quincena de años ha aparecido, también bajo el nombre de “didáctica”, un intento de constituir una *ciencia de la comunicación de los conocimientos y de sus transformaciones*; una epistemología experimental que intenta teorizar la producción y la circulación de los saberes un poco como la economía estudia la producción y la distribución de los bienes materiales. Esta ciencia se interesa, *en lo que estos fenómenos tienen de específico del conocimiento que se tiene en el punto de mira*, por la manera como conocimientos escasos se usan para la satisfacción de las necesidades de los hombres que viven en una sociedad y, en particular, por las operaciones esenciales de la difusión de los conocimientos, las condiciones de esta difusión y las transformaciones que esta difusión produce, tanto sobre esos conocimientos como sobre sus usuarios; por las instituciones y las actividades que tienen como objeto facilitar esas operaciones.” (Brousseau, 1990)

Hay un llamado al *carácter específico* en la Didáctica de las Matemáticas; se subraya entonces lo que es su punto de partida: las matemáticas.

La nueva etapa o visión aporta nociones, términos, y métodos novedosos en la Educación Matemática, todos interpretados como una reconstrucción teórica de las fronteras de esta nueva disciplina. Vamos a reseñar algunas de estas ideas y, posteriormente, introduciremos algunos comentarios sobre las mismas.

El carácter específico de la *Didáctica de las Matemáticas*

La nueva didáctica fundamental introduce nuevos objetos de estudio, que si bien existían en el modelo clásico, sin embargo, no era objetos de estudio primario, simplemente se asumían como “transparentes”. El marco teórico de la didáctica matemática francesa establece nuevos conceptos: por ejemplo, el de *situación didáctica*, cuya primera aproximación se formuló al principio de los años 70 (Brousseau, 1972 y, luego, como una teoría más desarrollada: Brousseau, 1994). La idea es definir conocimiento matemático mediante una situación que se llama *fundamental*. Entonces, el aprendizaje del conocimiento matemático en una escuela o una institución específica

se establece a través de la noción de *situación fundamental*. Y aquí hay supuestos teóricos: “La hipótesis básica de la teoría de situaciones de Brousseau es que el conocimiento construido o usado en una situación es definido por las restricciones de esta situación, y que, por tanto, creando ciertas restricciones artificiales el profesor es capaz de provocar que los estudiantes construyan un cierto tipo de conocimiento. Esta hipótesis está ciertamente más próxima al constructivismo que a las aproximaciones que se derivan de la noción Vygostskiana de zona de desarrollo próximo.” (Sierpiska y Lerman, 1996) No está claro, como veremos adelante, que esta conexión con el constructivismo siempre se puede establecer.

Con base en esa idea, es posible establecer una línea de investigación que establezca las situaciones fundamentales para cada concepto matemático, con estudio de supuestos y condiciones epistemológicas, situaciones didácticas, experimentación, evaluación de las experiencias. Para realizar eso, se afirma la necesidad de “reconstruir los conceptos matemáticos” teóricos propiamente, para luego construir las situaciones relativas. En esto, pareciera sentirse la influencia de Lakatos con la propuesta de “reconstrucciones racionales” (Sierpiska y Lerman, 1996).

De esta manera, a la vez, se busca ampliar drásticamente el objeto de estudio de la epistemología de las matemáticas. Por un lado, invocando aspectos sociales didácticos, y, por el otro, extendiendo la didáctica a otro tipo de instituciones. Es decir: ya no se refiere a una epistemología que clásicamente se orienta hacia la construcción del conocimiento matemático simplemente, sus conceptos y métodos teóricos, sino que se dirige a la "dimensión didáctica de los diferentes tipos de manipulación institucional de las matemáticas". Puesto en otros términos: se toma como objeto de estudio la actividad matemática en su conjunto en una institución, en donde intervienen otras variables socioacadémicas.

Un segundo concepto en esta orientación es el que se da con la idea de “*transposición didáctica*” [entendida como el paso de un objeto de saber científico a un objeto de enseñanza, en otras palabras los cambios o transposiciones que presenta un conocimiento científico para ser enseñado en un aula, (Chevallard 1985 y 1991)], que aparece a mediados de la década de los 80. Una de las tesis fuertes asociadas a esto es la que afirma que “las diferentes formas de manipulación social de las matemáticas no pueden ser estudiadas separadamente” (Gascón, J. 1998). De igual manera, se afirma, que no se puede separar la creación y evolución de las matemáticas del estudio de la enseñanza y la utilización de éstas (Gascón, 1993).

¿Cuál es la motivación principal detrás de toda esta visión y cuál es la fuente de los nuevos conceptos? En esencia, se trata de no solo avanzar más allá de las perspectivas vagas o muy generales de lo que es didáctica (arte, o conjunto de técnicas) sino, como señalaba Gascón, de no ver esta disciplina como una yuxtaposición de saberes. Por ejemplo, una yuxtaposición de pedagogía, psicología, historia, etc. donde las matemáticas son simplemente un componente más (y a veces uno subordinado). La afirmación es clara, no puede haber una didáctica en general al margen de lo específico, o sea de las matemáticas: “Los conocimientos pueden aparecer en situaciones originales, pero los saberes culturales están asociados necesariamente a prácticas sociales que les sirven de referencia. Un corolario del postulado fundamental es que a situaciones diferentes les corresponden conocimientos diferentes. Por consiguiente, el saber nunca es exactamente el mismo para sus creadores, para sus usuarios, para los

alumnos, etc., cambia. El estudio y el control de estas modificaciones, que nosotros llamamos *transposición didáctica* es el objeto principal de la teoría. Por tanto, lo único que se puede hacer es, en el mejor de los casos, modelizar las situaciones características de un saber, pero ya se dibuja una primera aportación de la didáctica.” (Brousseau, 1990)

Colocar las matemáticas como un componente más genera una distorsión grave, por un lado coloca a los especialistas de las otras disciplinas no matemáticas en imposibilidad de intervenir sobre los temas que no saben (los contenidos matemáticos) y atrincherarse en sus formaciones. Brousseau es preciso: “Las vías de investigación que se favorecen naturalmente son pues las que reposan sobre la hipótesis de una vaga complementariedad en el seno de equipos pluridisciplinarios, y que se expresan en un lenguaje común a todo el mundo; quedan excluidas, casi con toda certeza, las investigaciones sobre lo que es específico del conocimiento que se pretende, en beneficio de asuntos más generales. (Brousseau, 1991)

Por otro lado: empuja a los matemáticos a encerrarse exactamente en los contenidos. “Los enseñantes y los especialistas de la disciplina en cuestión (aquí los matemáticos que enseñan en las facultades de educación, a los que, en algunos casos, se les ha llegado a llamar “fundamentalistas”) se ven conducidos entonces a minimizar el papel de toda teoría, a poner en primer plano el contenido puro o la experiencia profesional.” (Brousseau, 1991)

La formación de los profesores es entonces un “embutido”: “La formación de los profesores se concibe como yuxtaposición de enfoques y de teorías independientes, cuya integración y utilización se deja a cargo de los propios profesores. En ausencia de una responsabilidad teórica y técnica sobre la enseñanza misma, cada investigación en «didáctica» fundada sobre una de las disciplinas conexas no tratará en el mejor de los casos más que uno de los aspectos de la cuestión y desembocará en advertencias, observaciones, análisis científicos lanzados al foro, señalando a los enseñantes. Estos reproches, de nula utilidad para los profesores, están destinados en realidad, muy a menudo, al público, y éste los transforma en exigencias impacientes, en picotadas ideológicas y finalmente en críticas obsesivas de la enseñanza.” (Brousseau, 1991)

Los profesores en formación se alejan de quienes producen matemáticas; y a la vez los matemáticos se alejan de los temas de la enseñanza.

¿A cuál perspectiva conduce esto? La didáctica de las matemáticas debe considerarse parte de las matemáticas: “La inclusión de la didáctica de las matemáticas en las matemáticas se justifica por los conocimientos esperados de la conexión de las estructuras correspondientes” (Brousseau, 1991). Para Brousseau ésta es la única opción para preservar la nueva disciplina y no subordinarse a las otras ciencias humanas (educación, historia, sociología etc.). Su posición es tajante:

“La eficacia, la calidad y la coherencia de la enseñanza ganarían con ello, pero, sobre todo, se trata de reafirmar los lazos que se corre el riesgo de que no se anuden naturalmente y que son indispensables: es poco probable que los didactas puedan mantenerse por más tiempo a resguardo de las interpelaciones de las ciencias humanas o del medio que pretenden tratar; por el contrario, nada concreto atrae verdaderamente a la comunidad matemática a tratar seriamente y con respeto sus problemas

epistemológicos, sociológicos y morales mediante la didáctica. Hace falta, al menos por ahora, que los didactas estén en la comunidad matemática porque a ella es a la que deben hablar y sobre ella deberán actuar finalmente. ¡Que los matemáticos los controlen, de acuerdo, pero que no puedan desembarazarse de la responsabilidad de su acción, sea cual fuere la suerte que les reserven!” (Brousseau, 1991)

Brousseau prefiere que los didactas estén en las escuelas de matemática a que estén en otras organizaciones como las facultades de educación. Parece olvidarse, si embargo, que cuando los matemáticos buscaron intervenir en la educación (como con la reforma de las Matemáticas Modernas) provocaron bastantes “daños” (Ruiz, 2000). Ya comentaremos esta propuesta más adelante.

Por supuesto, se busca también que los matemáticos asuman la didáctica como una tarea intrínseca a sus quehaceres. No solo debido a que para hacer didáctica hay que poseer dominio de las matemáticas, sino especialmente porque la transposición didáctica es parte de su práctica:

“Reorganizar su pensamiento para comunicarlo, o para enseñarlo, elegir lo que va a convencer, lo que va a ser útil, etc., constituye una parte importante de la actividad de los productores de matemáticas; pero reorganizar las matemáticas para enseñarlas y para favorecer nuevas investigaciones es una competencia esencial de la propia *investigación*. Es un acto de matemático que es un efecto, controlado o no, también del trabajo del enseñante. No es posible ya a los matemáticos controlar esta transposición didáctica sobre la base de una transparencia ilusoria. La complejidad de los fenómenos les obliga a ejercer esta fase esencial de su actividad colectiva con la ayuda de los medios nuevos y apropiados que propone la didáctica. Por todas estas razones, la didáctica de las matemáticas forma parte de las matemáticas, incluso si la organización actual de los conocimientos, profundamente estructuralista, no le puede reservar un sector en el sentido clásico. (Brousseau, 1991)

Es decir: no solo se asume que todo fenómeno didáctico posee un componente matemático esencial (lo que hacía necesario convertir las prácticas matemáticas escolares en objeto primario de investigación), sino que todo fenómeno matemático tiene un componente didáctico esencial.

Hay otros conceptos relevantes como los de obstáculo didáctico y campo conceptual que nos permitirán completar esta breve reseña.

En relación con el primero: “Un obstáculo es una concepción que ha sido en principio eficiente para resolver algún tipo de problemas pero que falla cuando se aplica a otro. Debido a su éxito previo se resiste a ser modificado o a ser rechazado: viene a ser una barrera para un aprendizaje posterior. Se revela por medio de los errores específicos que son constantes y resistentes. Para superar tales obstáculos se precisan situaciones didácticas diseñadas para hacer a los alumnos conscientes de la necesidad de cambiar sus concepciones y para ayudarles en conseguirlo.” (Godino, 2003)

Los campos conceptuales emergen debido a que las situaciones didácticas no se pueden analizar solamente con un concepto. Entonces, un campo conceptual refiere a varios conceptos, métodos y formas de representación. Por ejemplo, las estructuras multiplicativas, las aditivas, etc.

De la epistemología a la antropología de las matemáticas

Todo este tipo de consideraciones teóricas han llevado a una definición mucho más general de la didáctica de las matemáticas: “ciencia de las condiciones específicas de la difusión (impuestas) de los saberes matemáticos o útiles a las personas y a las instituciones humanas” (Brousseau, 1994). De esta manera, se amplía la aplicación del campo de la didáctica de las matemáticas más allá del sistema escolar. Es decir:

“... este paso, de la institución escolar a cualquier institución en la que se manipulen conocimientos matemáticos, con la consiguiente inclusión de los fenómenos de transposición didáctica, constituye la última de las ampliaciones de la problemática didáctica. Esta generalización del objeto de investigación es, por tanto, otra de las aportaciones del enfoque antropológico y en relación a las primeras formulaciones de la didáctica fundamental.” (Gascón, J. 1998)

De igual forma, afirman un “enfoque *antropológico* en didáctica de las matemáticas” (Chevallard, 1992) o una antropología de las matemáticas que amplía la epistemología clásica de las matemáticas, al considerar no solo la producción de conocimientos (Chevallard, 1990). Se pasa, por ejemplo, del *sujeto epistémico* al *sujeto didáctico* (Artigue, 1990). La actividad matemática, entonces, se interpreta integrando la construcción de un sistema de conceptos, el uso de lenguaje y un proceso cognitivo. Esto hace que se incorporen enfoques que, se afirma, son parciales: epistemológicos, lingüísticos, psicológicos, sociológicos etc. Pero ya no como yuxtaposición de saberes con subordinación de las matemáticas, sino como parte de un proceso dirigido por los matemáticos (aquellos que hacen didáctica –que no son muchos-).

Otro de los últimos desarrollos en esta aproximación es el que plantea que la matemática institucional se *modeliza* por medio de la noción de “obra matemática” (Chevallard, 1996). Ésta se plantea en los siguientes términos:

“Podemos decir, en resumen, que la matemática institucionalizada y, en particular, la matemática escolar, se organiza en obras matemáticas que son conjuntos estructurados de objetos matemáticos que surgen como respuesta a ciertas cuestiones planteables en el seno de dicha institución. Las obras matemáticas son así el resultado final de una actividad matemática que, como toda actividad humana, presenta dos aspectos inseparables: la práctica matemática que consta de tarea (materializadas en tipos de problemas) y técnicas útiles para llevar a cabo dichas tareas, y el discurso razonado sobre dicha práctica que está constituido por dos niveles, el de las tecnologías y el de las teorías. Estos son, en definitiva, los elementos constitutivos de toda obra matemática.” (Gascón, 1998)

En este enfoque se dice que: “El objeto primario de investigación didáctica lo constituyen las actividades matemáticas institucionales que se modelizan mediante la noción de proceso de estudio de una obra matemática en el seno de una institución.” (Gascón, 1998). Esto lo reseñan Sierpiska y Lerman:

“En desarrollos más recientes de la teoría, se ha propuesto pasar de la comparación de tipos diferentes de conocimiento (conocimiento del investigador matemático versus matemáticas escolares) a un dominio más amplio de comparación de diferentes tipos de prácticas sociales (Martinand, 1989, en Arsac, 1992). Chevallard (1991) se interesa por las relaciones entre

la práctica social de la investigación en matemáticas y la práctica social de la enseñanza y aprendizaje institucionalizado de las matemáticas en la escuela. Diferentes pares de prácticas sobre las matemáticas han atraído la atención de otros investigadores. Por ejemplo, Lave (1988) y Waikerdine (1988) estudiaron la falta de congruencia entre el funcionamiento del pensamiento matemático en la escuela y en esferas extraescolares de prácticas tales como en la administración de la casa, crianza de los niños, y el trabajo.” (Sierpinska y Lerman, 1996)

Es decir, encontramos aquí otra generalización o ampliación del campo de la didáctica. Esta idea de “proceso de estudio” es mayor o más ambiciosa que la de “proceso de enseñanza aprendizaje”. Aunque se afirma que para el “estudio de la obra matemática” el aprendizaje es el efecto buscado, la enseñanza se ve sólo como un medio establecido dentro de un proceso donde existen muchos otros (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997). Este proceso de estudio posee fases: un primer encuentro que es el que permite tomar conciencia de los objetos para el estudiante, un segundo momento exploratorio previo al pensamiento lógico como el pensamiento *plausible* en (Polyá, 1954), un tercer momento del trabajo de la técnica que conduce al dominio de las técnicas que anteriormente fueron exploradas (la resolución del problema matemáticamente) y, por último, momentos de institucionalización y evaluación, puesto que el estudio se realiza en una institución y debe haber un proceso de evaluación. Ahora bien, estas nociones de “obra matemática” y de “estudio”, parecieran ser una extrapolación de la misma didáctica escolar en varias cosas. Por ejemplo, los “momentos” del “estudio”, mencionados arriba, en realidad son muy semejantes a los pasos que se establecen en una estrategia de resolución de problemas: “visualización” inicial, exploración, resolución técnica matemática, evaluación y socialización (institucionalización).

La noción de “*ingeniería didáctica*” propone una orientación metodológica con la ejecución de cuatro fases consecutivas (entre ellas un análisis *a posteriori* y evaluación, facilitando de esta forma una dimensión experimental vinculada directamente a una dimensión teórica).

Gascón afirman que la didáctica de la matemáticas en esta aproximación francesa representa “un cambio progresivo de problemática” y un nuevo “programa de investigación”, siguiendo los términos usados por Lakatos (por ejemplo en Lakatos, 1978).

Este es el momento pertinente para hacer un balance. Empecemos con las etapas en la Educación Matemática.

Etapas y enfoques en la Educación Matemática

Es posible, en efecto, distinguir una etapa de no profesionalización de la Educación Matemática. A partir de la experiencia que se tuvo con la reforma de las “matemáticas modernas” se dio un proceso amplio en busca de una profesionalización en la Educación Matemática. Por un lado, se ha buscado establecer un perfil profesional para los educadores de las matemáticas y, al mismo tiempo, fortalecer la Educación Matemática como una disciplina científica. En ambas tareas se ha buscado importar conceptos, métodos, experiencias de diferentes disciplinas: las matemáticas para empezar, psicología, historia de las matemáticas y la ciencia en general, la pedagogía, la lingüística, la antropología, la sociología, etcétera. Ahora bien, el hecho de importar

estos conceptos, teorías o experiencias no nos parece que suponga necesariamente una subordinación de la Educación Matemática a la psicología, y a otras disciplinas. Todas las disciplinas educativas integran diferentes componentes; más aún, se trata de un territorio poderosamente *transdisciplinario*. Que en ese proceso se le pueda dar un cierto énfasis a la psicología o a los aspectos cognitivos, no pareciera conducir a sostener una valoración tan drástica. En ese mismo sentido, los diferentes asuntos a los que responde la didáctica de la matemática dentro del enfoque francés no está muy claro que no puedan ser abordados con una sabia integración de otros conceptos, algunos importados de otras disciplinas, otros propios de los quehaceres específicos en la Educación Matemática. Nos parece que el asunto es más complejo.

No se puede negar, sin embargo, que la escuela francesa ha aportado nuevos conceptos, nuevos términos teóricos, algunos procedimientos y una fundamentación importante de la disciplina de la Educación Matemática. Conceptos como situación fundamental didáctica, transposición didáctica, obstáculo didáctico, obra matemática, estudio, etcétera, afirman un marco teórico original y útil. No obstante, pareciera más conveniente afirmar esos aportes en la didáctica de las matemáticas más que como una “etapa” que supera cualitativamente a otra previa, como una de varias aproximaciones y aportes diferentes dentro de un propósito global compartido de establecer una disciplina científica y al mismo tiempo construir un perfil profesional para ésta. Como bien señala Schoenfeld estamos ante un campo muy nuevo en la comunidad científica:

“Debemos recordar lo reciente que es la Educación Matemática como campo de investigación. Los matemáticos están acostumbrados a medir el linaje matemático en siglos, cuando no en milenios; en contraste, el linaje de la investigación en Educación Matemática (especialmente la Educación Matemática en el nivel de pregrado) se mide en décadas. La revista *Educational Studies in Mathematics* comenzó a editarse en los años 60. El primer número del Volumen 1 del *Journal for Research in Mathematics Education* fue publicado en Enero de 1970. Las series de volúmenes de *Research in Collegiate in Mathematics Education* –el primer conjunto de volúmenes dedicado exclusivamente a Educación Matemática en el nivel universitario –comenzó a aparecer en 1994. No es accidental que la gran mayoría de los artículos citados por Artigue [1] en su revisión de 1999 sobre contribuciones de la investigación fueron escritos en los años 90.; ¡había poco antes de esa fecha en el nivel de pregrado!” (Schoenfeld, 2000)

Hay varios asuntos propiamente teóricos que debemos comentar en torno a la aproximación “francesa”.

Educación Matemática y Matemáticas: *diferencias y convergencias*

En primer lugar, la enseñanza aprendizaje de las matemáticas y su estudio en ese sentido general que le dan los franceses, en efecto, constituye un mundo cognoscitivo diferente, específico. Como hemos afirmado en otra parte (Ruiz, 2000), las técnicas, metodologías, objetos y conceptos, particulares que forman parte de esta disciplina y el conjunto completo de la misma, cuyo fin es el aprendizaje, parten, por supuesto, de las matemáticas en primer lugar. Son los conceptos y métodos matemáticos el origen de partida. En ese sentido, los procesos de construcción matemática y los de validación en las comunidades matemáticas son fundamentales. Y, sin embargo, se trata de asuntos que invocan varias dimensiones: la historia, la psicología, la antropología, la filosofía,

etcétera. Todos enfocados hacia las matemáticas y su enseñanza aprendizaje. Y, de igual manera, se incorporan las variables que intervienen en la práctica o en los quehaceres educativos, con el grado de generalidad que esto último se afirme o acepte. Por ejemplo, las políticas gubernamentales, los textos, los programas, los sistemas de evaluación, las condiciones de infraestructura, experiencia de la clase, la organización de grupos, los determinantes culturales e ideológicos, etc. A esto, además, deben integrarse las técnicas y los instrumentos y las estrategias pedagógicas y metodológicas precisas que pueden utilizarse para lograr el aprendizaje.

Todos estos elementos intervienen en la práctica profesional, dentro de las comunidades de educadores de las matemáticas. Las investigaciones ofrecen conocimiento nuevo y fundamentan o amplían una disciplina científica, pero se trata de una disciplina que tiene una relación muy directa con esas prácticas, y se nutre de ellas. La práctica profesional es en este caso un medio significativo en la construcción del nuevo conocimiento.

Es necesario construir la Didáctica de las Matemáticas como una disciplina científica, pero es importante asumir desde un principio una perspectiva inter y transdisciplinaria. Máxime en una época que potencia la *transdisciplinarietà* y la ruptura de departamentos rígidos y estancos en la educación superior. Las redes de investigación en la nueva disciplina deben establecer el requisito de la formación matemática entre la mayoría de sus participantes. En eso estamos de acuerdo, el dominio de la disciplina es un punto de partida necesario (tanto para la investigación como para la práctica docente). Sin embargo, no es suficiente. La formación en otros territorios científicos también debe incorporarse. Es decir, formación en las ciencias humanas como la psicología, la historia, la lingüística, la antropología, y la filosofía. A veces no será posible que la misma persona posea ambas formaciones y en ese caso el concurso de otros especialistas, aunque no sepan de matemáticas, puede ser útil y conveniente. Se tratará de establecer la conducción de los procesos de investigación a partir de quienes sí poseen un dominio de las matemáticas. Esto es un asunto a abordar de manera concreta.

Enfatizar la especificidad de la Didáctica de las Matemáticas, con base en la conexión entre matemáticas y educación, estableciendo puentes teóricos, es de gran importancia. Muy bien lo sintetiza Godino (2003).

“Existen teorías generales del aprendizaje y teorías de la enseñanza. Pero, cabe preguntarse ¿aprendizaje de qué?; ¿enseñanza de qué?. Los fenómenos del aprendizaje y de la enseñanza se refieren a conocimientos particulares y posiblemente la explicación y predicción de estos fenómenos depende de la especificidad de los conocimientos enseñados, además de factores psico-pedagógicos, sociales y culturales. Esto es, los factores "saber a aprender" y "saber a enseñar" pueden implicar interacciones con los restantes, que obligue a cambiar sustancialmente la explicación de los fenómenos didácticos. La programación de la enseñanza, el desarrollo del currículo, la práctica de la Educación Matemática, precisa tener en cuenta esta especificidad. La insuficiencia de las teorías didácticas generales lleva necesariamente a la superación de las mismas mediante la formulación de otras nuevas, más ajustadas a los fenómenos que se tratan de explicar y predecir. Incluso pueden surgir nuevos planteamientos, nuevas formulaciones

más audaces que pueden revolucionar, por qué no, los cimientos de teorías establecidas.

El marco estrecho de las técnicas generales de instrucción (o incluso de la tecnología) no es apropiado para las teorías que se están construyendo por algunas líneas de investigación de la Didáctica de las Matemáticas. El matemático, reflexionando sobre los propios procesos de creación y comunicación de la matemática, se ha visto obligado a practicar el oficio de epistemólogo, psicólogo, sociólogo,... esto es, el oficio de didacta.”

Esta óptica es importante no solo para construir la disciplina científica en abstracto, sino en la práctica profesional. Durante décadas y décadas hasta ahora en todo el mundo han predominado programas de formación de profesores de matemáticas que han sido en esencia “embudidos” de pedagogía general y matemáticas (la mayoría de las veces de bajo nivel). Una yuxtaposición pobre e inútil para propiciar el progreso de la enseñanza aprendizaje de las matemáticas. Los profesores de matemáticas formados en esas condiciones terminan al egresarse de las universidades dependiendo de sus virtudes y debilidades solamente para su labor, sin poder fundamentar sus actividades profesionales en métodos y conceptos y recursos proporcionados por su disciplina en las aulas universitarias. A las dificultades propias de la naturaleza de las matemáticas para su aprendizaje, se añaden las derivadas de una separación drástica entre pedagogía y matemáticas. La construcción de la disciplina académica permitirá avanzar en la definición de un perfil profesional propio, una especialidad capaz de seguir progresando. La investigación en este escenario, ahora y como ejemplo, es posible de concebirse como un proceso permanente incorporado, como dijimos antes, en los quehaceres de la profesión, en el aula misma.

No obstante, hay que tener cuidado en la construcción de los puentes teóricos; precisamente, una de las críticas que ha tenido este enfoque de la *Didactique* es que apuntalan las conexiones entre matemáticas y didáctica de las matemáticas a veces dejando de lado sus diferencias, y, por lo tanto, debilitando el lugar teórico específico de la Educación Matemática. Es decir, que el peso de las características de las matemáticas es excesivo sobre otras dimensiones propias de la Educación Matemática. Esta es una advertencia relevante.

La Educación Matemática es bien diferente de las matemáticas en la construcción cognoscitiva y en la aplicación y manipulación de sus constructos teóricos. Algo así como que son funciones de varias variables, en las que las variables son distintas. La Educación Matemática es una ciencia social y debe asumir muchos de los métodos que estas ciencias han desarrollado. La matemática posee una lógica científica distinta asociada en parte a las ciencias naturales y a la vez separada con sus propias características (procesos exclusivos de construcción y de validación). Son muchas las diferencias, entre ellas: La Educación Matemática es una ciencia social de tremenda importancia en los entornos sociales y políticos, de manera muy diferente a las matemáticas. No vamos aquí a insistir mucho en este asunto. Baste señalar un par de cosas: por una parte, las investigaciones y trabajos de la mayoría de comunidades matemáticas refieren a temas y conceptos que poco tienen que ver con aquellos que estudia la Didáctica de las Matemáticas. Los niveles de formación en especialidad, además, que se requieren apenas para entender muchas de esas investigaciones son imposibles de encontrar en quienes han asumido como foco de su quehacer académico la Didáctica. Por ejemplo, nada más alejado de las preocupaciones científicas de los

matemáticos que la matemática que se imparte en la educación secundaria o primaria e incluso una gran parte de la universitaria. Por más que los matemáticos de alto vuelo requieran hacer transposiciones didácticas para comunicar sus resultados teóricos, no es similar a la que se ocupa hacer en la didáctica escolar. Tampoco hay relación estrecha en lo que se refiere a la comunicación que “objetiviza” los resultados matemáticos, con base en criterios formales y de rigor exigidos por la comunidad matemática. De seguro, hay algunas convergencias, que es importante tomar en cuenta, pero se trata de asuntos en esencia distintos (tanto en la enseñanza como en la investigación). Mientras que la investigación en matemática admite poca participación (en métodos, criterios, objetos) de otras disciplinas, para la Educación Matemática ésta es más bien esencial. Y esto, epistemológica y culturalmente, debe entenderse con toda justicia.

Por otra parte, la actitud cultural y social de los matemáticos en muchas partes ha sido de extraordinaria arrogancia académica, subestimando el valor de las otras disciplinas científicas. Campos profesionales como la historia y filosofía de las matemáticas, por ejemplo, han sido constantemente subestimados intelectualmente por los matemáticos, e incluso aquellos matemáticos que se dedicaron a esos campos han sido vistos con recelo y poca estima. Igual ha sucedido con aquellos que se han dedicado a la Didáctica. En particular, no ha sido extraña una actitud despectiva hacia la enseñanza de las matemáticas. Esa arrogancia se expresó con toda intensidad en la reforma de las Matemáticas Modernas a lo largo y ancho de muchos países. Colocar a los didactas de las matemáticas dentro de las comunidades matemáticas sin más, como propone Brousseau, es pasar por alto estas diferencias epistemológicas y académicas y estas condiciones socioculturales. Aun más, supone subordinar a los didactas a los matemáticos. Entonces: se pide no subordinar las matemáticas a otras disciplinas en la construcción de la didáctica, pero se subordina la didáctica a las matemáticas. Esto se aleja, incluso, de apuntalar a los educadores de las matemáticas como una comunidad científica y académica aparte.

La disyuntiva para los didactas de las matemáticas entre estar bajo la bota de otras ciencias humanas o aquella de los matemáticos (en la que Brousseau toma partido por la segunda opción), no es válida. Puede que en algunos países, estar subordinados a las facultades de educación haya sido enajenante y un obstáculo para el progreso de la disciplina de la didáctica de las matemáticas. No ha sido extraña, por ejemplo, una actitud de parte de los pedagogos de tratar de “dictar cátedra” sobre todos los aspectos pedagógicos (didácticos y curriculares) de todas las disciplinas, sin tomar en cuenta que muchas veces las estrategias pedagógicas emergen directamente de los conceptos dentro de la disciplina. La reacción social y teórica asociada de los matemáticos preocupados por la didáctica es justa, pero aquí se debe adoptar la perspectiva más amplia. Debe consignarse, además, que, en otros países, las cátedras de Didáctica de las Matemáticas fueron asignados a departamentos de matemática (por ejemplo, en Alemania, entre 1960 y 1975, se crearon 100 cátedras de esa manera). (Godino, 2003)

Enfrentar las “taras” epistemológicas, académicas y profesionales que han existido en los programas de formación en la Educación Matemática, con separación estéril de matemáticas y educación y muchos otros problemas, debe abrir paso a una nueva visión, pero no a subordinar la didáctica a las matemáticas. Es más razonable construir una comunidad aparte con el establecimiento de reglas (de participación académica y de validación científica) que permitan la consolidación científica y académica. Aquí será

posible, incluso, avanzar en la “construcción” de matemáticos preocupados por la didáctica y activos a la vez en la misma.

En este tipo de discusiones es donde nos percatamos de las dificultades teóricas de la nueva disciplina. Estamos en una intensa época de creación, modificación y desarrollo, y por eso las indicaciones de prudencia y escepticismo de Schoenfeld son plenamente válidas:

“Los matemáticos que se aproximan a este trabajo deberían estar abiertos a una amplia variedad de ideas, comprendiendo que los métodos y perspectivas a los que están acostumbrados no se aplican a la investigación educativa de manera directa. No deberían buscar respuestas definitivas sino ideas que se pueden usar. Al mismo tiempo, todos los utilizadores y prácticos de la investigación en Educación Matemática (nivel de pregrado) deberían ser saludablemente escépticos. En particular, debido a que no hay respuestas definitivas, ciertamente se debería desconfiar de alguien que las ofrece. En general, el principal objetivo para las próximas décadas consiste en continuar construyendo un cuerpo de teoría y métodos que permita a la investigación en Educación Matemática llegar a ser un campo cada vez más sólido, tanto básico como aplicado.” (Schoenfeld, 2000)

Sobre la epistemología

Debemos añadir, por otra parte, que hay algunos supuestos en la teoría de las transposiciones didácticas, como bien consignan Sierpinska y Lerman:

La noción de transposición didáctica hizo en sus comienzos (Chevallard, 1985, 1990) ciertas hipótesis más o menos tácitas sobre el conocimiento matemático que la distinguen fuertemente del constructivismo epistemológico. Consideró que existe un objeto identificable llamado 'saber sabio matemático', contra el cual el contenido de las matemáticas enseñadas en las escuelas podía ser comparado y juzgado como 'legítimo' o no. Ya incluso la existencia de conocimiento mera de las mentes de los individuos es inexplicable desde un punto de vista constructivista. También se asumió tácitamente en la teoría de la transposición didáctica que lo que se enseña será aprendido finalmente, con algún retraso, naturalmente, y posiblemente no por todos los estudiantes. Por tanto, existe un 'estado de conocimiento' (o 'experto') ideal al que la enseñanza y el aprendizaje deberían converger. De nuevo este supuesto es contrario a cómo los constructivistas ven los procesos de enseñanza y aprendizaje. (Sierpinska y Lerman, 1996)

Esto ha generado críticas:

“La teoría de la transposición didáctica ha sido criticada debido, entre otros motivos, por la vaguedad de la noción de 'saber sabio matemático' (Freudenthal, 1986). Una respuesta a esta crítica (encontrada en Arsac, 1992) reveló el carácter sociocultural de la noción: la sociedad reconoce la existencia de un cierto grupo de profesionales que producen conocimiento el cual, en la cultura, se considera 'cognoscible' ('knowledgeable') (sabio) o 'científico' (en el sentido amplio que no reduce la ciencia sólo a la ciencia natural). Esta interpretación del conocimiento está próxima a la que Vygotsky consideró tácitamente (y no cuestionó) y quizás incluso más a la epistemología inherente a la aproximación de Bruner respecto de la adquisición del lenguaje.” (Sierpinska y Lerman, 1996)

Lo señalamientos se refieren a la necesidad de afinar lo que se debe asumir como conocimiento matemático y por otra parte lo que sería el derivado de realizar la transposición. Sin duda, no puede pensarse en un “saber sabio matemático” al margen de consideraciones básicas en torno a la metodología de la historia de la ciencia. El conocimiento solamente puede interpretarse (conceptualizarse) en contextos aportados por las comunidades científicas específicas que establecen sus reglas de validación particulares. Entonces: no hay conocimiento universal “en el aire”, se invoca la contextualización (histórica, social, etc.), aunque aquí hay que cuidarse de los extremos que últimamente proponen las versiones relativistas en la filosofía de la ciencia. (Ruiz, 2003 (b))

Resulta interesante resaltar, finalmente, una relación que existe entre esta “antropología de las matemáticas” y nuestras ideas sobre la epistemología en general. Para la *Didactique* hay una introducción de un factor epistemológico adicional ofrecido por las condiciones sociales específicas en las que se desarrolla la relación sujeto objeto; este es el entorno *escolar*, o, siguiendo la extrapolación o ampliación del concepto empleado, el *institucional* en el que se usa la matemática de manera precisa. Este factor modifica la misma relación entre sujeto y objeto epistemológicos. Para nosotros, el factor “contextual” o social global es clave, no solo para las matemáticas sino para el conocimiento en general. En ese sentido, retrotraemos algunos componentes de nuestra perspectiva epistemológica.

La “nueva antropología de las matemáticas” se puede ver como un caso específico de la visión epistemológica general que hemos sostenido desde hace muchos años (Ruiz, 1990, 2000, 2003), que integra sujeto, objeto y sociedad en una nueva situación *epistémica*. Hemos afirmado que las matemáticas solo se pueden entender con una epistemología que afirme una relación mutuamente condicionante entre el sujeto y el objeto epistémicos. Una epistemología que afirma el papel activo, no pasivo o receptivo, tanto del objeto como del sujeto epistémicos. Pero se trata de una metodología que no niega que uno de estos factores puede ser más determinante en ciertas ocasiones. Dónde y cómo es un asunto sujeto al estudio concreto y particular que no se puede establecer por la vía del decreto *a priori*. En esto juega también un papel importante el tipo de conceptos matemáticos. Es claro en esta visión que no se privilegia ninguno de los factores epistemológicos, como sí lo hace el empirismo clásico (el objeto), el Racionalismo (el sujeto) e incluso el mismo Piaget (el sujeto) aunque desde una óptica basada en premisas biológicas (no demostradas). Otro elemento de orden epistemológico: no se puede prescindir en el análisis de las componentes epistemológicas de lo social como factor autónomo, condicionante y activo. Aunque éste se pueda ver como parte del objeto epistémico en sentido clásico, su consideración independiente ayuda a comprender la trascendencia de este factor en la construcción epistemológica. Afirmamos, entonces, una relación integrada condicionante y recíproca de todos estos factores al mismo tiempo (de nuevo *a priori* no se puede determinar cuál es el papel preciso de cada uno en cada caso). Esto quiere decir por ejemplo que las diferencias en el influjo social pueden generar diferencias en la evolución *psicogenética* de los individuos. Con ello se subraya que distintos contextos culturales, por ejemplo, pueden determinar diferencias epistemológicas. Diferentes estímulos psicosociales en los niños pueden generar diferentes resultados. No quiere decir esto que las condiciones sociales son determinantes por encima de todo, en particular las condiciones biológicas. Más aun, no sostenemos un determinismo social (a veces de naturaleza económica como el que ha prevalecido en muchas escuelas de interpretación histórica), pero sí es

necesario subrayar que existen diferencias en este terreno y es necesario tener una aproximación más adecuada que haga intervenir lo concreto y particular. En este sentido, a manera de ejemplo: nos alejamos de las posiciones epistemológicas que encierran, por ejemplo, la psicogénesis en etapas universales rígidas y lineales.

En resumen, una “antropología de la Educación Matemática”, en efecto, involucra los tres factores activos a la hora de interpretar su significado epistemológico, uno de ellos el entorno social (como en nuestra perspectiva). En nuestra aproximación, sin embargo, ponemos un mayor énfasis en la misma relación (dialéctica o mutuamente condicionante) que en ese terreno nos acercaría más a una epistemología de corte *interaccionista* (Cobb, 1990; Bauersfeld, 1995), pero no es nuestro propósito extender esta digresión aquí.

Conclusión

Desde un punto de vista epistemológico la *Didactique* ofrece interesantes vías de investigación sobre la base de conceptos y procedimientos novedosos en la investigación en Educación Matemática. Debe subrayarse en esta perspectiva una estrecha relación entre matemáticas y pedagogía que busca, a partir de la primera, la construcción de situaciones precisas para estudiar el aprendizaje y enseñanza de los asuntos matemáticos considerados. Esto empuja hacia un fundamento de la Didáctica de las Matemáticas, en este enfoque, como una disciplina científica, sustento también, en general, de una práctica profesional específica. Debe tenerse cuidado, sin embargo, en no subordinar, para el progreso de la Educación Matemática, las matemáticas a otras disciplinas, pero tampoco la Educación Matemática a las matemáticas. La Educación Matemática se apuntala como una comunidad académica y científica.

La visión antropológica de la *Didactique* amplía una epistemología que solo afirma la relación entre objeto y sujeto, y orientada solamente hacia la construcción cognoscitiva. Este enfoque se coloca en el territorio de epistemologías más amplias que involucran actores como los influjos sociales de manera específica en la ecuación epistemológica.

Es importante al juzgar estas contribuciones, finalmente, tener en mente dos asuntos: por un lado, la relevancia de adoptar una actitud escéptica y crítica para con una disciplina que es muy nueva y en la que sus fundamentos están en cuestión todavía. Por otra parte, precisamente por el momento que atraviesa: a la vez que afirmar su identidad y la delimitación de sus fronteras, no se debe impedir de incorporar teorías, métodos o procedimientos de otras disciplinas más consolidadas; esto no podría invalidar su especificidad ni su construcción como disciplina científica.

BIBLIOGRAFÍA Y REFERENCIAS

- Arsac, G.: (1992). "The Evolution of a Theory in Didactics: The Example of Didactic Transposition", en R. Douady y A. Mercier (eds.), *Recherches en didactique des mathématiques*, La Pensée Sauvage éditions, Grenoble. Citado por Sierpinska, A. y Lerman, S. (1996).
- Artigue M. (1990). "Épistémologie et didactique", *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 10, 2.3, 241-286.
- Artigue M. (1995). "La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos, en Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., Gómez, P. (editores.) *Ingeniería didáctica en Educación Matemática*, Grupo Editorial Iberoamérica: México, pp. 97-140.
- Artigue, M. (1996). "Ingenierie didactique". En *Didactique des Mathématiques*, Brun J. (org.), Lausanne-Paris: Delachaux.
- Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., Gómez, P. (editores) (1995). *Ingeniería didáctica en Educación Matemática*, Grupo Editorial Iberoamérica: México.
- Ausubel D. P. (1968). *Educational Psychology: A Cognitive View*, Holt, Rinehart and Winston: New York.
- Balacheff, N. (1988). *Une étude des processus de preuve en mathématique chez des élèves de collège*. Tesis Université de J. Fourier, Grenoble.
- Bauersfeld, H. (1995). "Language Games in the Mathematics Classroom: Their Function and their Effects", in P. Cobb and H. Bauersfeld (eds.), *The Emergence of Mathematical Learning: Interaction in Classroom Cultures*, Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, Hilldale, NJ.
- Bishop, A. J. et al (edits.) (1989). *International Handbook of Mathematics Education*. Dordrecht, HL: Kluwer, A. P.
- Brousseau, G. (1972). *Processus de mathématisation. La Mathématique à l'Ecole Élémentaire*, 428-442, APMEP: Paris.
- Brousseau, G. (1986). "Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques», *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 7.2, 33-115.
- Brousseau, G. (1990). "¿Qué pueden aportar a los enseñantes los diferentes enfoques de la didáctica de las matemáticas? (Primera parte)". *Revista Enseñanza de las Ciencias*. España, Institut de Ciències de l'Educació de la Universitat Autònoma de Barcelona: vol: 8,3, pag: 259-267. Traducción al español de Luis Puig.
- Brousseau, G. (1991). "¿Qué pueden aportar a los enseñantes los diferentes enfoques de la didáctica de las matemáticas? (Segunda Parte)". *Revista Enseñanza de las Ciencias*. España, Institut de Ciències de l'Educació de la Universitat Autònoma de Barcelona: vol: 9,1, pag: 10-21. Traducción al español de Luis Puig.
- Brousseau, G. (1994). *Problèmes et résultats de Didactique des Mathématiques, ICMI Study 94*.
- Brousseau, G. (1998) *Théorie des situations didactiques*. Paris: Pensée Sauvage.
- Bruner, J. S. (1985). 'The Role of Interaction Formats in Language Acquisition', in JP. Forgas (ed.), *Language and Social Situations*. Springer-Verlag, New York.

- Chevallard, Y. (1985). *Transposition Didactique du Savoir Savant au Savoir Enseigné*, La Pensée Sauvage Éditions, Grenoble.
- Chevallard, Y. (1990). “Didactique, anthropologie, mathématiques”, Postfacio a la segunda edición de *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*, La pensée sauvage: Grenoble.
- Chevallard, Y. (1992). “Concepts fondamentaux de la didactique: Perspectives apportées au une approche anthropologique”. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12(1), 73-112.
- Chevallard, Y. (1996). “La fonction professorale: esquisse d’un modèle didactique”, en R. Noirfalise et M-J. Perrin-Glorian (coord.), *Actes de l’École d’Été de Didactique des Mathématiques* (Saint-Sauves d’Auvergne, 1995), 83-122.
- Chevallard, Y., Bosch M. y Gascon J. (1997): *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*, ICE/Horsori: Barcelona.
- Chevallard, Y. (1991). *La Transposition Didactique*. Paris: La Pensée Sauvage.
- Cobb, P. 1990, ‘Multiple Perspectives’, in L.P. Steffe and T. Wood (eds.), *Transforming Children’s Mathematical Education: International Perspectives*, Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, Hillsdale, NJ.
- Cobb, Paul (1994). “Where is the mind? Constructivist and Sociocultural Perspectives on Mathematical Development” en la revista *Educational Researcher* volumen 23, número 7, octubre.
- Confrey, J. (1990). ‘What Constructivism Implies for Teaching’, in R.B. Davis, C. A. Maher, and N. Noddings (eds.), *Constructivist Views on the Teaching and Learning of Mathematics, Journal for Research in Mathematics Education*, Monograph No. 4, 107-122.
- Douady, R. y Mercier, A. (eds.), *Recherches en didactique des mathématiques*, La Pensée Sauvage éditions, Grenoble. Citado por Sierpinska, A. y Lerman, S. (1996).
- Forgas, JP. (ed.) (1985). *Language and Social Situations*. Springer-Verlag, New York.
- Freudenthal, H. (1986). “Review of Y. Chevallard, *Transposition Didactique du Savoir Savant au Savoir Enseigné*”, La Pensée Sauvage Éditions, Grenoble, 1985”, *Educational Studies in Mathematics* 17. 323-327.
- Gascon J. (1994-95). “Un nouveau modèle de l’algèbre élémentaire comme alternative à l’arithmétique généralisée”, *Petit x*, 37, 43-63.
- Gascon J. (1998). “Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica”, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 18/1, nº 52, pp. 7-33, 1998.
- Godino, J. (2003). *Perspectiva de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica*. Documento de trabajo del curso de doctorado "Teoría de la educación Matemática". Recuperable en Internet: <http://www.ugr.es/local/jgodino/> Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada, España.
- Huse, T. y Postlethwaite, T. N. (Eds.) (1989). *The International Encyclopedia of Education Supplementary Volume*, Oxford: Pergamon Press.
- Kilpatrick J. (1981). “The Reasonable Ineffectiveness of Research in Mathematics Education”, *For the Learning of Mathematics*, 2.2, 22-29.

- Lakatos I. (1978). *The Methodology of Scientific Research Programmes*, Philosophical Papers Volume I, Cambridge University Press: Cambridge.
- Lakatos, I. (1981): *Matemáticas ciencia y epistemología*. Trad. Diego Ribes Nicolás. Madrid: Alianza Editorial, 1981. Versión original: *Mathematics, Science and Epistemology - Philosophical Papers. Volume 2*, Cambridge University Press, 1978.
- Lave, J.: 1988, *Cognition in Practice: Mind, Mathematics and Culture in Everyday*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Lesh R. y Landau M., eds., (1983). *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*, Academic Press: New York.
- Martinand, J. L. (1989). 'Pratiques de Référence, Transposition Didactique et Savoirs Professionnels en Sciences et Techniques', *Les Sciences de l' Education* 2, 23-29. Citado en (Arsac, 1992).
- Pais, L. (2002). *Didática da Matemática: Uma análise da influencia francesa*. Brasil: Auténtica Editora, Rua Januária.
- Piaget, J. (1959). *The Language and the Thought of the Child*, Routledge and Kegan Paul Ltd., London.
- Polyá G. (1954). *Mathematics and plausible reasoning*. Princeton University Press: Princeton (2 vols.). La obra fue publicada primeramente en 1945.
- Ruiz, A. (1990). *Matemáticas y filosofía. Estudios logicistas*. San José: EUCR.
- Ruiz, A. (2000). *El desafío de las matemáticas*. Heredia: EUNA.
- Ruiz, A. (2003) (a). *Historia y filosofía de las matemáticas*. San José: EUNED.
- Ruiz, A., (2003) (b). *Entre la política y la filosofía*. San José, Costa Rica: EUCR.
- Schoenfeld, A. (2000). "Purposes and Methods of Research in Mathematics Education". *Notices of the AMS*, Volume 47, Number 6; June/July 2000. Traducción al español de Juan Godino.
- Sierpinska, A. y Lerman, S. (1996). "Epistemologies of mathematics education". En Bishop, A. J. et al (edits.). *International Handbook of Mathematics Education* (pp.827-876). Dordrecht, HL: Kluwer, A. P. (Traducción de Juan Godino).
- Vergnaud, G. (1996). "La théorie des champs conceptuels". En *Didactique des Mathématiques*, Brun J. (org.), Lausanne-Paris: Delachaux.
- Walkerdine, V. (1988). *The Mastery of Reason: Cognitive Development and the Production of Rationality*. Routledge, London and New York.