

BOOLE Y LAS MATEMATICAS DEL SIGLO XIX

Ángel Ruiz

www.cimm.ucr.ac.cr/arui

Referencia: año 1987. Revista de filosofía de la Universidad de Costa Rica, Volumen XXV, No 62, Editorial Universidad de Costa Rica.

Resumen

Se trata de describir algunas de las principales ideas de George Boole en el contexto determinante de las matemáticas que emergen en el siglo XIX. Se busca la conexión de la abstracción que se establece a partir de las nuevas geometrías y el álgebra (no euclidianas, cuaterniones, etc.) y los desarrollos que pretendían demostrar que la lógica era matemática. El trabajo se completa con una descripción del proceso de rigorización en los fundamentos lógicos de las matemáticas modernas establecidas a partir de la revolución matemática del siglo XVII. La rigorización matemática fue una componente especial de las tradiciones que condujeron al proceso matemático-filosófico (desde finales del XIX y con fuerza hasta los treinta de este siglo) que se conoce como el de los Fundamentos de la Matemática. Este último proceso se puede considerar que se inicia con Frege, para quien los resultados booleanos fueron de extraordinaria importancia

Summary

It is intended to describe some of the main ideas of George Boole in the decisive context of emerging mathematics of the XIX th century. We look for the connection between the new geometries and algebras (non Euclidian, quaternions, etc.) and developments seeking to show that logic is pan of mathematics. This paper is completed with a description of the rigorization process in the logical foundations of Mathematics established since the mathematical developments of the XIV th Century. This mathematical rigorization was one of the special components of the traditions Leading to the mathematico-philosophical process (since the last part of the XIX th Century and continuing strongly till the Thirties in this century) called Foundations of Mathematics. This process is considered to begin with Frege, for whom Boolean results were extraordinarily important.

Durante el siglo XVII se generaron los resultados teóricos centrales que darían *inicio* a una nueva época en las matemáticas desde la antigüedad griega. Los trabajos de la geometría analítica (Descartes y Fermat), la aritmética superior, las probabilidades, etc., pero especialmente el cálculo infinitesimal (Newton y Leibniz) establecieron el derrotero teórico de la elaboración matemática del siglo XVIII y las bases del salto en abstracción que se daría en el siglo XIX. El cálculo condensó los trabajos de muchos matemáticos que desde el Renacimiento venían trabajando en un método que buscaba dar cuenta del “Continuo” (espacial y temporal). Fue sin duda la especial conexión entre los métodos matemáticos y la mecánica (que había establecido Galileo) una fuente teórica e histórica esencial para el decurso de los nuevos resultados. Estos métodos matemáticos no estaban sin embargo desvinculados de todos aquellos procesos intelectuales que en las ciencias físicas se habían ido estableciendo, motivados por un contexto teórico y social revolucionario. Las nuevas

condiciones históricas permitieron iniciar la respuesta a problemas matemáticos planteados desde Eudoxo y Arquímedes.

El salto cualitativo que vivió la matemática del XVII exigía sin embargo un desarrollo en nuevos resultados que cuantitativamente asegurasen la utilidad así como la validez entendida de estas matemáticas. Las matemáticas del siglo XVIII (a diferencia de las del siglo XVII) fueron esencialmente cuantitativas. Fue un siglo de un gran desarrollo matemático conectado a la evolución de las ciencias llamadas naturales. El “Siglo Heroico” configuraba, sin embargo, una situación que podríamos caracterizar como contradictoria. Se tenía una gran producción matemática, un gran éxito en la capacidad de predicción en la ciencia de los resultados matemáticos, y al mismo tiempo “un marasmo lógico en los fundamentos”¹. El centro del análisis era el cálculo y a pesar de la enorme oscuridad lógica, a pesar del uso “libertino” de los números, éste experimentó un enorme desarrollo². Los números irracionales eran admitidos a principios del XIX, aunque no los negativos y los complejos³. Berkeley aprovechaba el marasmo para atacar los infinitesimales de Leibniz y la matemática en general⁴. Durante el siglo XVII las matemáticas que se hicieron estuvieron basadas en la intuición y el sentido físico de las mismas, que fue lo que las condujo y no la lógica. La confianza de su trabajo no residía ni en la consistencia ni en reglas formales.

Los problemas de la ausencia de fundamentos lógico si bien habían sido tratados no ocuparon un lugar preponderante entre los matemáticos, hasta que (a principios del siglo XIX) se evidenciaron elementos de la matemática que rompían supuestamente el esquema de la coincidencia matemática- naturaleza, la idea extraída del mundo griego antiguo (adecuadamente cristianizado) del conocimiento matemático como conocimiento de la naturaleza. El surgimiento de las geometrías no euclidianas y la existencia de números que no seguían lo esperable en ellos (los cuaterniones de Hamilton), volcaron las mentes sobre los fundamentos lógicos. Si se miraba hacia el análisis no había fundamento ni en el álgebra ni en la aritmética usada, y en la geometría había problemas⁵. Los cuaterniones no conmutativos y las geometrías no euclídeas eran lo que Kline caracteriza como un auténtico desastre⁶.

Este “primer desastre” va a tener consecuencias extraordinarias para la reflexión sobre la matemática y para la evolución de la filosofía de las matemáticas. Durante el siglo XVIII y principios del XIX la visión Kantiana sobre la matemática se podía apreciar en coherencia con la realidad de lo que era la práctica matemática. Sin embargo, cuando emergen las geometrías no euclidianas y los cuaterniones las cosas no pueden quedar en el mismo sitio. El sentido de la “intuición” kantiana entró en problemas, sobre todo cuando había asumido como dada en la “intuición” la geometría euclídea. Los recientes resultados matemáticos señalaban la importancia de la estructura y la validez lógica frente a una intuición entendida en conexión con lo sensible. La correspondencia de la matemática con la realidad no había sido entendida en cuanto estructuras susceptibles de tener un modelo capaz de coincidir con la real, sin relación con la experiencia más que en aspectos planteados en ciertos momentos. Había sido entendida a partir de la relación sensible individual, limitada por las fronteras más directas de las condiciones de los hombres. Si se quiere, se puede decir que la visión que se tenía de la matemática era la que permitía una conexión casi sensorial con el espacio inmediato y con la realidad material.

Desde un punto de vista *teórico*, las geometrías no euclidianas y los cuaterniones pusieron de manifiesto la existencia de un nuevo carácter en las matemáticas, que no podía ser aprehendido por Kant; no porque haya asumido una particular geometría, sino porque las nociones de intuición y construcción que estableció no podían dar cuenta de ese carácter. La emersión de “lo nuevo” en las matemáticas del siglo XIX afirmaba una separación entre las

matemáticas y la realidad. Mostró un camino en el que la manipulación formal y la consistencia lógica ocupan un papel muy importante. Para Kline lo que sucedió era algo que se acumulaba desde el XVIII:

...un oculto cambio en la naturaleza de la matemática ha sido hecho inconscientemente por los maestros. Hasta alrededor de 1500, los conceptos de las matemáticas eran idealizaciones inmediatas o abstracciones de la experiencia (...). Cuando además los números complejos, una álgebra extensiva que emplea coeficientes literales, y en las nociones de derivada e integral entraron en las matemáticas, el asunto empezó a ser dominado por conceptos derivados de los lugares recónditos de las mentes humanas⁷.

Para Kline esta nueva matemática (que crea conceptos más que abstrae) está presente desde los siglos anteriores⁸.

Sin embargo, lo nuevo no fue comprendido como tal y entonces no se entendió la necesidad de un fundamento aparte al de las verdades evidentes⁹. En realidad, la matemática no es nunca mera abstracción o generalización inductiva; existe un contenido *operativo y estructurador* en la esencia de la práctica matemática. Los irracionales y negativos en los griegos por ejemplo no son mero producto de la abstracción; no se trata entonces de un cambio de un tipo de abstracción a otro. El carácter de la nueva matemática del XIX va a estar de terminado por el devenir propio de las matemáticas, así como por las condiciones generales de la evolución científica de la época; lo esencial va a ser lo primero.

La producción matemática hasta el siglo XVIII concentró resultados matemáticos extraordinarios que (en la segunda mitad y en la primera del XIX) encuentran un punto de acumulación. Esto engendró una auto-conciencia diferente en ella. La matemática (fusión histórica y social de esfuerzos individuales) entró en el siglo XIX en una nueva etapa evolutiva en la que la conciencia de ella fue un factor de la misma; aunque esta conciencia no correspondiese (en mi opinión) a la esencia de su naturaleza última. Las geometrías no euclidianas y los cuaterniones fueron los resultados teóricos catalizadores que sacudieron el mundo matemático y se convirtieron en la palanca central gestadora de la nueva etapa.

Las nuevas condiciones en las matemáticas (y la reflexión sobre las mismas) generaron un intento extendido por solventar las debilidades de las matemáticas del XVII y el XVIII. Se sucedieron importantes intentos en la búsqueda de la consistencia de las nuevas geometrías y en la rigorización del análisis y el álgebra (Bolzano, Abel, Cauchy, etc.). Cauchy trató de fundamentar el cálculo en el número, y en el concepto de límite¹⁰. El mejor intento en esta rigorización fue hecho por Weierstrass¹¹. Este dio una derivación de las propiedades de los irracionales a partir de los racionales, y Dedekind se colocó en la misma dirección¹². Pero, además, como era consecuencia de los nuevos tiempos, la Lógica debía sufrir modificaciones.

El resurgir de la lógica en las islas británicas fue iniciado en el siglo XIX por Richard Whately. Sir William Hamilton y Augustus De Morgan contribuyeron también; pero fue George Boole el verdadero fundador de la Lógica simbólica moderna. Su aproximación se va a inspirar en la visión del álgebra de Peacock, Gregory y De Morgan, pero sobre todo en las características de una nueva matemática (cuaterniones y geometrías no euclidianas apuntalaban una visión axiomática y operativa, no cuantitativa). Los avances de Boole en la Lógica son establecidos por la matematización de la misma (el simbolismo y el carácter operatorio-aritmético). Sus trabajos reforzaban la nueva visión de las matemáticas.

Para Boole la Lógica posee su fundamento último en las operaciones de la mente¹³. Afirma la posibilidad de la Lógica en la capacidad humana para concebir clases y designar

sus elementos a través de un nombre común¹⁴. Ahora bien, es en el lenguaje donde se pueden percibir las operaciones de la mente¹⁵. Para Boole, las leyes de la lógica podían establecerse a través de un cálculo deductivo¹⁶ y simbólico¹⁷.

La visión de Boole conectaba con las pretensiones leibnizianas de un cálculo simbólico, que es entendido como matemático, axiomático. Para Boole la Lógica es operatoria¹⁸. Es por esto que la Lógica es entonces Matemática y no metafísica. Más aún, el carácter axiomático de la Lógica es lo que más le une a la Matemática¹⁹. En 1847 decía en *Análisis Matemático de la Lógica*: "...la Lógica, como la geometría, se basa en verdades axiomáticas y... sus teoremas se construyen teniendo en cuenta la doctrina general de los símbolos que constituye la base del Análisis hoy aceptado"²⁰.

Insiste en el mismo libro: "... porque es un método que se apoya en el empleo de símbolos regidos por leyes combinatorias generales y conocidas, cuyos resultados admiten una interpretación no contradictoria"²¹.

Sin embargo, Boole considera que las leyes de la Lógica son matemáticas sólo en su forma, no en su contenido²². Para demostrar su punto de vista realiza una reducción simbólica, operativa y axiomática de las leyes de la Lógica. La aproximación booleana encontraba sustento intelectual en los resultados matemáticos de la época. En particular, el descubrimiento de nuevas entidades algebraicas no consideradas convencionalmente como números y el descubrimiento de sistemas numéricos que no cumplen ciertas propiedades aritméticas usuales (La conmutatividad en los cuaterniones)²³.

Para Boole la matemática no es de magnitudes, su esencia está dada por su carácter calculatorio y axiomático²⁴. Esta es una aproximación que deja de lado los aspectos cuantitativos que fueron los que predominaron en el siglo XVIII. Para Boole la realidad (al igual que la Lógica) también está regida por las leyes matemáticas.

La forma precisa de la expresión matemática de la Lógica es en Boole a través de "ecuaciones"²⁵, cosa que Hamilton (el filósofo) había obtenido. Los razonamientos se pueden expresar a través de funciones y sus desarrollos. El camino interno entre las premisas y las conclusiones puede establecerse simbólica y matemáticamente, para sólo al final retomar el sentido lógico. Esta "expansión" es el procedimiento fundamental en el despliegue formal del sistema de Boole²⁶. El tratamiento booleano de la Lógica introduce la Lógica de clases, y con ello una mejor aproximación que la dominada por la relación clásica sujeto-predicado. De hecho la matemática tal y como él la concibe es el 'instrumento' que le permite la delimitación de fronteras para abrir curso a la independización de la Lógica como ciencia. Esta dirección va a ser asumida en la segunda mitad del siglo XIX y establecerá indiscutiblemente el camino de la Lógica moderna. Boole inicia con su teoría de las funciones de verdad y su expresión en forma normal disyuntiva. Los trabajos de Boole actualizaron en el espectro intelectual de la época la visión leibniziana sobre la matemática y la Lógica, engendraron elementos que fueron utilizados luego en la edificación del proyecto logicista de Frege. Apuntaló entonces una visión axiomática y formal de las relaciones entre Lógica y aritmética²⁷.

Los resultados de Boole superan los trabajos de Leibniz (que ya habían intentado sin éxito ser superados por diversos autores previos: Segner, J. Lambert, Ploucquet, Holland, De Castillon, Gergonne)²⁸. Boole al asociar a una proposición el conjunto de casos en los que se verifica. "... interpreta la relación de implicación como una inclusión y su cálculo con conjunt sele proporcionan de este modo las reglas del 'Cálculo Proposicional'²⁹.

Sus trabajos van a servir como base para Jevons, el mismo De Morgan y C.S. Peirce. De Morgan había establecido en su *Formal Logic* de 1847 que la Lógica se refiere esencialmente a relaciones, al igual que Boole³⁰. Peirce extendería estos resultados en sus

escritos de 1870 a 1893 y Schroeder los sistematizaría³¹. El énfasis en las relaciones era una consecuencia del flujo general que apuntalaba la axiomática y de la nueva aproximación hacia la matemática y la Lógica. Peirce introdujo una notación para las proposiciones que expresan relaciones, enfatizó (lo que Boole apenas había tocado) el concepto de función proposicional³² y el de cuantificadores³³. La conjunción de relaciones, clases, funciones proposicionales y cuantificadores, abría una nueva etapa en la Lógica y describía el panorama de la misma previo a los trabajos de Frege.

Durante esta época los avances en la Lógica habían sido introducidos en el marco de la evolución de la matemática. Muchas de las innovaciones aparecían condicionadas por las necesidades en la búsqueda de sustentar condiciones de rigor para los resultados matemáticos. En Boole (como también en Peirce) la Lógica simbólica era matemática. La “autoconciencia” de la Lógica como *ciencia* independiente, aparte de su consideración como leyes del pensamiento, objetivas o subjetivas, va a aparecer con claridad en Frege. Aquí la Lógica ya no es matemática, sino al revés: esta última es Lógica. Para establecer esta *inversión* adecuadamente era necesario una renovación y síntesis de la lógica, un lenguaje simbólico más desarrollado y una aproximación filosófica apropiada. El proceso que conduce a ese resultado en Frege no fue establecido, sin embargo, a partir solamente de los productos del trabajo de Boole, De Morgan o Peirce; de nuevo la evolución de los problemas de las matemáticas fue central en ese desarrollo.

La búsqueda del fundamento lógico de la matemática en una etapa en que se percibía esto como una tarea intelectual decisiva, fue un factor determinante.

Durante el siglo XVIII se habían desarrollado trabajos en el análisis muy importante (Euler, Lagrange, etc.). En la búsqueda del rigor se buscó la conexión de los infinitesimales, las “operaciones” de derivación e integración y, en general, el continuo real, con la aritmética. Se puede señalar a Bolzano como iniciador de este proceso, aunque desde el siglo anterior se buscaban formas de rigorización de los resultados obtenidos. Para Cauchy es necesario buscar definiciones claras y precisas y el establecimiento preciso de las fronteras de los conceptos y las fórmulas. Intentos en la aproximación del análisis y la aritmética fueron realizados por Martin Ohm (1822)³⁴, y después Grasmann, Hankel y Weierstrass. Pero fue este último el que ofreció una definición rigurosa de los números irracionales a partir de los racionales. Su trabajo implica una “... liberación del análisis del tipo de prueba geométrica intuitiva tan prevaleciente en ese tiempo”³⁵. La noción de número real estaba conectada entonces a las magnitudes de la geometría. Otros autores como Dedekind (en sus trabajos de 1872 y 1888)³⁶ y Cantor, tomando como punto de partida la validez de las propiedades de los racionales les conectaron a éstos los irracionales³⁷. Nos señala E.T. Bell en su Historia de las Matemáticas de 1940:

La definición de Dedekind de los números irracionales como cortaduras en clases infinitas de racionales, las sucesiones de números racionales de Cantor para definir los números irracionales, y los números irracionales de Weierstrass considerados como clases de relaciones, todas ellas en definitiva referían el continuo de los números reales a los números naturales. Las “magnitudes” de Eudoxio quedaban reemplazadas por construcciones hipotéticas realizadas con los números 1, 2, 3. De este modo, la aritmetización del análisis era una vuelta al programa de Pitágoras³⁸.

La aritmetización del análisis no se puede considerar un proceso mecánico y simple de rigorización de resultados matemáticos, sino que debe verse integrada a una nueva “autoconciencia” en la evolución de la matemática. La aritmetización va dirigida en el siglo

XIX al abandono de la intuición geométrica que había predominado en el cálculo del siglo XVIII; es la búsqueda por aprehender una nueva realidad en la que la validez lógica aparece como central³⁹.

Los trabajos de Cantor en lo que se refiere a los fundamentos del análisis continúan la obra de Weierstrass⁴⁰. En las definiciones de los reales el problema residía en la forma de traducir el paso al límite de los enteros. Para Cantor, por ejemplo, “toda sucesión regular define un número; la clase de todos los números así definidos es el sistema de los números reales”⁴¹. Para Dedekind y también para Weierstrass está presente esta incidencia sobre lo que es una referencia al continuo y, entonces, al infinito. La noción de continuo real implica un proceso matemático (mental si se quiere) cualitativamente diferente al que se manifiesta en la aritmética. Con la aritmetización del análisis no se trataba simplemente de desgeometrizarse el cálculo y de apuntar hacia mejores condiciones lógicas en sus fundamentos; se trataba de una reducción de diferentes nociones conceptuales (referidas a objetos diferentes) a las nociones aritméticas. Este proceso de cualidades diferentes sólo podía ser realizado a partir de una nueva abstracción y, sugiero, a partir de la introducción implícita o explícita de supuestos teóricos sobre la existencia y la naturaleza de las entidades matemáticas. La aritmetización de las matemáticas es la manifestación, por otra parte, de una intención reduccionista de sus distintos componentes. Es la búsqueda de una unidad teórica en la diversidad, cuyo planteamiento exige una readecuación en la conciencia de la naturaleza de la matemática e incluso del conocimiento. Un proceso que no fue abordado en el siglo XIX y es posible que fuesen necesarios más elementos teóricos que los existentes entonces para establecer su actualidad. La matemática del siglo XIX se puede resumir en la emersión de las geometrías no euclidianas, la aritmetización del análisis, la sistematización geométrica y el surgimiento de formas algebraicas nuevas pero quedarían por fuera, sin duda, muchos resultados importantes⁴²: los trabajos de Gauss en la teoría de números (seguido por Dirichlet), los logros en la generalidad de la geometría analítica, la teoría de las funciones de Weierstrass, Schwarz y Mittag-Leffler⁴³. En este panorama intelectual se construyó la teoría de conjuntos. Esta nace, nos dice Bourbaki, debido a: “Las necesidades del Análisis -en particular el estudio a fondo de las funciones de variables reales-, que se desarrolla durante todo el siglo XIX”⁴⁴

Tal y como la conocemos ahora es trabajo de Cantor. Este se interesó por el asunto en 1872, a propósito de los problemas de equipotencia en 1873, de la dimensión a partir de 1874, y entre 1878 y 1884 incidió sobre casi todos los problemas de la teoría de los conjuntos⁴⁵.

A pesar de la oposición general que esta teoría generó en la época de Cantor, Weierstrass y Dedekind siguieron con interés la labor de Cantor. Para Dedekind su objetivo era fundamentalmente la aplicación de la noción de conjunto a la de número⁴⁶. Desde el momento en que aparecen muchos de los resultados, éstos van a ser aplicados a las cuestiones clásicas del Análisis⁴⁷. La teoría de conjuntos fue muy importante porque iba a servir como engranaje de los principales resultados matemáticos y lógicos de la época y también concentraría sobre ella la reflexión sobre los fundamentos de la matemática. La teoría de conjuntos, de una u otra forma, va a representar desde entonces un papel esencial en la descripción de las matemáticas, a pesar de las dificultades que a partir de ella se sucedieron en momentos posteriores.

Los resultados de Boole en la Lógica se unirían a aquellos de la rigorización de la matemática, en el contexto de un nuevo carácter en la matemática, creando un cuadro intelectual extraordinario para la síntesis en los fundamentos y la reflexión sobre las matemáticas. El primer intento en ese sentido sería dado por Gottlob Frege retomando la filosofía logicista de Leibniz.

Notas

- ¹ Kline, Morris. (1980). *Mathematics. The Loss of Certainty*. New York: Oxford University Press. pp. 153.
- ² Cf. *Ibid.*, pp. 140.
- ³ Cf. *Ibid.*, pp. 153.
- ⁴ Cf. *Ibid.* pp. 145, 146.
- ⁵ Cf. *Ibid.*, pp. 127.
- ⁶ Cf. *Ibid.*, pp. 99.
- ⁷ Cf. *Ibid.*, pp. 167
- ⁸ Cf. *Idem*
- ⁹ Cf. *Ibid.*, pp. 168.
- ¹⁰ Cf. *Ibid.*, pp. 174, 175.
- ¹¹ Cf. *Ibid.* pp. 177.
- ¹² Cf. *Ibid.*, Pp. 178, 179.
- ¹³ Boole, G. (1960). *Análisis Matemático de la Lógica*. Trad. Armando Nasti Vera. Buenos Aires: Universidad Nacional de la Plata. pp. 9.
- ¹⁴ *Ibid.* pp. 13
- ¹⁵ Boole, G. (1958). *An investigation of the laws of thought on which are founded the mathematical theories of logic and probabilities*. New York: Dover Publications. Inc., pp. 24.
- ¹⁶ Boole. *Análisis Matemático de la Lógica*. pp. 10.
- ¹⁷ *Ibid.*, pp. 13.
- ¹⁸ Boole. *Laws of Thought*. pp. 1.
- ¹⁹ *Ibid.*, pp. 5.
- ²⁰ *Análisis Matemático de la Lógica*. pp. 25.
- ²¹ *Ibid.*, pp. 12.
- ²² Cf. Boole. *Laws of Thought*. pp. u.
- ²³ Kneale, Martha y William. *El desarrollo de la lógica*. Trad. Javier Muguerza. Madrid: Editorial Tecnos, 1972. pp. 374.
- ²⁴ Boole. *Análisis Matemático de la Lógica*. pp. 12.
- ²⁵ *Ibid.*, pp. 18.
- ²⁶ Kneale. *Ob. Cit.* pp. 384.
- ²⁷ Boole. *Laws of Thought*. pp. 46.
- ²⁸ Bourbaki, Nicolás. *Elementos de Historia de las Matemáticas*. Trad. Jesús Hernández. Madrid: Alianza Editorial, 1976. pp. 21.
- ²⁹ *Ibid.*, pp. 21.
- ³⁰ Cf. Kline. *Ob. Cit.* pp. 185.
- ³¹ Cf. *Ibid.*, pp. 186.
- ³² Cf. *Idem*.
- ³³ Cf. *Ibid.* pp. 187.
- ³⁴ Cf. Babini, José. (1969). *Historia Suscinta de la Matemática*. Madrid: Espasa-Calpe, pp. 121.
- ³⁵ Cf. Bourbaki. *Ob Cit.* p. 41.
- ³⁶ Wilder, Raymond. (1956). *Introduction to the foundations of Mathematics*. New York. John Wiley and sons, pp. 190.
- ³⁷ Cf. Babini. *Ob. Cit.* p. 123
- ³⁸ Cf. Kline. *Ob Cit.* pp. 179.
- ³⁹ Bell, E. T. (1949). *Historia de las Matemáticas*. Trad. R. Ortiz. México: Fondo de Cultura Económica, pp. 291.
- ⁴⁰ Cf. *Ibid.*, pp. 307.
- ⁴¹ Cf. Wilder. *Ob. Cit.* pp. 195
- ⁴² Bell. *Ob. Cit.* pp. 289.
- ⁴³ Cf. Babini. *Ob. Cit.* pp. 130.
- ⁴⁴ Cf. *Ibid.* pp. 131, 132.
- ⁴⁵ Bourbaki. *Ob Cit*, pp. 46.
- ⁴⁶ Cf. *Ibid.*, pp. 47.
- ⁴⁷ Cf. *Ibid.*, pp. 49.